Алгоритм побудови унітального дільника для многочленної матриці

Володимир Прокіп
(ІППММ НАН України, вул. Наукова 3б, м. Львів, Україна, 79060)
E-mail: `v.prokip@gmail.com`

Нехай $\mathbb{F}_{n\times n}$ та $\mathbb{F}_{n\times n}[x]$ – кільця $(n\times n)$-матриць над полем $\mathbb{F}$ та кільцем многочленів $\mathbb{F}[x]$ відповідно. Позначимо: I_n – одинична $(n\times n)$-матриця і O – нульова $(n\times n)$-матриця.

Для неособливої нижньої трикутної матриці $A(x)=\begin{bmatrix} a_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}(x) & a_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \dots & a_n(x) \end{bmatrix}$, де $a_i(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальні многочлени і $\deg a_{ij}(x)<\deg a_i(x)$ для всіх $i>j$, вкажемо умови її зображення у вигляді добутку $A(x)=B(x)C(x)$, де $B(x)=I_nx^r+\sum_{i=1}^r B_ix^{r-i}\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня $r\geq 1$ із визначником $\det B(x)=b(x)$.

Якщо матриця $B(x)=I_nx^r+\sum_{i=1}^r B_ix^{r-i}\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$ є лівим дільником трикутної матриці $A(x)$, то з рівності $A(x)=B(x)C(x)$ отримуємо $A(x)=D(x)G(x)$, де $D(x)=\begin{bmatrix} d_{ij}(x)\end{bmatrix}$ – нижня трикутна матриця з наступними властивостями: $d_{ii}(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальні многочлени, $\deg d_{ij}(x)<\deg d_{ii}(x)$ для всіх $i>j$, $\deg\prod_{i=1}^k d_{ii}(x)\leq kr$, $\prod_{i=1}^n d_{ii}(x)=\det B(x)=b(x)$. Отже, $a_i(x)=d_{ii}(x)g_{ii}(x)$ для всіх $1\leq i\leq n$. Нижче вкажемо алгоритм побудови унітального дільника $B(x)$ із неособливої трикутної матриці $A(x)\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$.

1). Нехай визначник неособливої нижньої трикутної матриці $A(x)\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$ зображений у вигляді добутку $\prod_{i=1}^n a_i(x)=b(x)c(x)$, де $b(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальний многочлен степеня nr, $r<\deg A(x)$.

2). Діагональні елементи $a_i(x)$ матриці $A(x)$ запишемо у вигляді $a_i(x)=d_{i,m_i}^{(l)}(x)g_{i,m_i}^{(l)}(x)$, де $d_{i,m_i}^{(l)}(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальні многочлени або елементи поля $\mathbb{F}$ для всіх $m_i=1,2,\dots;\ l=1,2,\dots$. За елементами $d_{i,m_i}^{(l)}(x)$ побудуємо множину діагональних $(n\times n)$-матриць наступним чином:

$$\mathbf{D}_b=$$

$$\left\{D^{(l)}(x)=\operatorname{diag}(d_{1,m_1}^{(l)}(x),d_{2,m_2}^{(l)}(x),\dots,d_{n,m_n}^{(l)}(x)),\text{ де }\deg\prod_{i=1}^k d_{i,m_i}^{(l)}(x)\leq kr\text{ і }\prod_{i=1}^n d_{i,m_i}^{(l)}(x)=b(x)\right\}.$$

3). Для кожної матриці $D^{(l)}(x)\in\mathbf{D}_b$ для $A(x)$ будуємо факторизації $A(x)=T_b^{(l)}(x)G(x)$, де $T_b(x)=\begin{bmatrix} d_{1,m_1}^{(l)}(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_{m_2,1}^{(l)}(x) & d_{2,m_2}^{(l)}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m_n,1}^{(l)}(x) & t_{m_n,2}^{(l)}(x) & \dots & \dots & d_{n,m_n}^{(l)}(x) \end{bmatrix}$ – трикутна матриця така, що $\deg t_{m_i,j}^{(l)}(x)<\deg d_{i,m_i}^{(l)}(x)$ для всіх $j<i$.

Очевидно, що для деяких матриць $D^{(l)}(x)$ факторизацій матриці $A(x)=T_b^{(l)}(x)G(x)$ може і не існувати. Пошук елементів $t_{m_i,j}^{(l)}(x)$ базується на знаходженні розв'язків $\{u_{ij}(x),v_{ij}(x)\}$ рівняння $b_i(x)u_{ij}(x)+c_j(x)v_{ij}(x)=\widetilde{a}_{ij}(x)$ таких, що $\deg v_{ij}(x)<b_i(x)$. Якщо ж ці розв'язки існують, то остання нерівність гарантує їхню єдиність. Зауважимо, що коефіцієнтами многочленів $t_{m_i,j}^{(l)}(x)$

можуть бути параметри із поля $\mathbb{F}$. Множину таких трикутних матриць позначимо через

$$\mathbf{Tr}_b = \left\{ T_b^{(l)}(x) = \left[t_{i,j}^{(l)}(x) \right],\ \text{де} \ \left[\begin{array}{lll} t_{i,j}^{(l)}(x) = 0, & \text{якщо} & j > i; \\ t_{i,k}^{(l)}(x) = d_{i,m_k}^{(l)}(x), & \text{якщо} & k = m_i; \\ \deg t_{m_i,j}^{(l)}(x) < \deg d_{i,m_i}^{(l)}(x) & \text{для всіх} & j < m_i. \end{array} \right. \right\}.$$

Зрозуміло, якщо одна з наведених вище умов не виконується, то для $A(x)$ не існує лівих унітальних дільників із визначником $\det B(x) = b(x)$. Враховуючи теорему 2 із [1] та наведені вище міркуванння отримуємо.

Теорема 1. *Для трикутної неособливої матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня $r \geq 1$ із визначником* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли в множині $\mathbf{Tr}_b$ існує матриця $T(x) = \sum_{i=0}^{s} T_i x^{s-i}$, для якої*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} T_0 & O & \cdots & O \\ T_1 & T_0 & & \vdots \\ T_2 & T_1 & \vdots & O \\ \vdots & \vdots & & T_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_s & T_{s-1} & \vdots & T_{s-r} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} T_0 & O & \dots & \dots & O \\ T_1 & T_0 & & \vdots & \vdots \\ T_2 & T_1 & \vdots & O & O \\ \vdots & \vdots & & T_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & O \\ T_s & T_{s-1} & \vdots & T_{s-r} & I_n \end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Для матриці $A(x) = \begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ x^2 + 1 & x(x^2 + x + 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}_{2,2}[x]$ вкажемо дільники $I_2 x + B_0$ із визначниками $x^2 + x$, x^2 і $x^2 + x + 1$ відповідно та дільники $I_n x^2 + B_1 x + B_2$ із визначниками $x^2(x^2 + x + 1)$ і $(x^2 + x)(x^2 + x + 1)$ відповідно. Результати обчислень наведено у таблиці.

$b(x)$	$x^2 + x$	$x^2 + x$	x^2	$x^2 + x + 1$
$\operatorname{diag}(d_1(x), d_2(x))$	$\operatorname{diag}(x^2 + x, 1)$	$\operatorname{diag}(x + 1, x)$	$\operatorname{diag}(x, x)$	$\operatorname{diag}(1, x^2 + x + 1)$
$\mathbf{Tr}_b$	$\begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ ax + b & 1 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Q}$	–	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$
$I_2 x + B_0$	–	–	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x + 1 & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$

$b(x)$	$x^2(x^2 + x + 1)$	$(x^2 + x)(x^2 + x + 1)$	$(x^2 + x)(x^2 + x + 1)$
$\operatorname{diag}(d_1(x), d_2(x))$	$\operatorname{diag}(x, x^3 + x^2 + x)$	$\operatorname{diag}(x^2 + x, x^2 + x + 1)$	$\operatorname{diag}(x+1, x^3+x^2+x)$
$\mathbf{Tr}_b$	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x^2 + x + 1 & x^3 + x^2 + x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ x^2 + 1 & x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$	-
$I_2 x^2 + B_1 x + B_2$	$\begin{bmatrix} x^2 + 0,5x & 0,5x \\ 0,5(1 - x) & x^2 + 0,5(x + 1) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ -x & x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$	-

Література

[1] Bell J.H. Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrix equations. *American J. Math.*, 71(2) : 249–256, 1949.